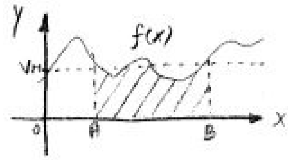
CALCOLO DEL VOLUME DI UNA SFERA ED IN GENERALE DEL VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE

p.i. DAVIDE COSCIANI

PREMESSA: SIGNIFICATO GEOMETRICO DELL' INTEGRALE:

L'OPERATORE D'INTEGRALE DEFINITO IN UN INTERVALLO A, B CALCOLA L'AREA SOTTESA ALLA CURVA DETERMINATA DALLA FUNZIONE INTEGRANDA E LIMITATA NELL' INTERVALLO A, B.-



$$AREA = \int_A^B f(x)\,dx$$

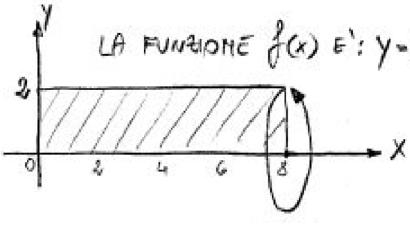
$$\text{Valore Medio } V_M = \frac{AREA}{B-A}$$

TALE AREA E' EQUIVALENTE ALL'AREA DI UN RETTANGOLO DI BASE V_M E DI ALTEZZA B-A.-

CALCOLIAMO ORA MEDIANTE L'INTEGRALE IL VOLUME DI UN CILINDRO, OSSIA UN SOLIDO DI ROTAZIONE OTTENUTO RUOTANDO ATTORNO ALLA ALTEZZA UN RETTANGOLO;

LA FUNZIONE $f(x)$ E': $y=2$

$$AREA = \int_0^8 2\,dx = 2\int_0^8 dx = 2\Big[x\Big]_0^8 = 16$$



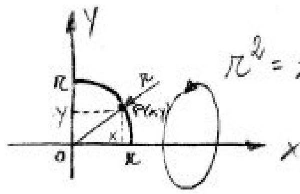
IL VALORE MEDIO E' (OVVIAMENTE) 2, E LO SI OTTIENE DIVIDENDO L'AREA PER L'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE: $\frac{16}{8-0} = 2$

CON V_M CALCOLIAMO L'AREA DI BASE DEL CILINDRO: $A_{BASE} = V_M^2 \pi$ OSSIA UGUALE 4π. IL VOLUME E' $A_{BASE} \times ALTEZZA$, OSSIA $4\pi \times 8 = 32\pi$

PIU' IN GENERALE, POSSIAMO STABILIRE CHE IL VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE E' QUINDI

$$\pi\int_0^h f(x)^2\,dx \quad \text{DOVE } h \text{ E' LA SUA ALTEZZA}$$

VOLENDO ORA CALCOLARE IL VOLUME DI UNA SFERA, COME SOLIDO DI ROTAZIONE, E' BENE CONSIDERARE UN QUARTO DI CIRCONFERENZA E POI, MEDIANTE ROTAZIONE SU UN ASSE OTTENERE IL VOLUME DI MEZZA SFERA E INFINE RADDOPPIARLO. QUESTO PER EVITARE CALCOLI CON VALORI NEGATIVI:



$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

COME SI PUO' VEDERE, LA FUNZIONE CHE DESCRIVE UNA CIRCONFERENZA SU UN PIANO CARTESIANO LA SI RICAVA DALLA SUA STESSA DEFINIZIONE: LA CIRCONFERENZA E' INFATTI IL "LUOGO GEOMETRICO DI PUNTI EQUIDISTANTI DA UN PUNTO FISSO DETTO CENTRO. IL RAGGIO DI CURVATURA E' LA DISTANZA DI CIASCUN PUNTO DAL CENTRO". QUINDI, COME SI PUO' VEDERE DALLA FIGURA, PER OGNI PUNTO P DI COORDINATE X, Y CHE APPARTIENE ALLA CURVA, SI VERIFICANO 2 CONDIZIONI: 1) SI TROVA AD UNA DISTANZA DALL'ORIGINE UGUALE AGLI ALTRI PUNTI; 2) TALE DISTANZA SI CHIAMA RAGGIO. PERTANTO, PER IL TEOREMA DI PITAGORA, SE CONSIDERIAMO IL RAGGIO COME L'IPOTENUSA DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO, E LE COORDINATE X E Y RELATIVE AL PUNTO D'INTERSEZIONE TRA IL RAGGIO E LA CURVA COME LE DIMENSIONI DEI DUE CATETI, PER CIASCUNO DEGLI INFINITI RAGGI CHE POSSIAMO TRACCIARE VALE L'EQUAZIONE $r^2 = x^2 + y^2$. // ①

QUESTA E' LA FUNZIONE IMPLICITA DELLA CIRCONFERENZA.
VOLENDO (E DOVENDO!) ESPLICITARE LA y IN QUESTA EQUAZIONE, SI OTTIENE $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

METTENDO LA FUNZIONE ORA CALCOLATA NELL'INTEGRALE CHE ABBIAMO TROVATO, INTEGRANDO DETERMINIAMO IL VOLUME DI MEZZA SFERA, BASTA MOLTIPLICARE PER 2 CHE SI OTTIENE IL VOLUME COMPLETO:

$$\text{VOLUME } \tfrac{1}{2} \text{ SFERA} = \pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}^{\,2} \, dx =$$

$$\pi \int_0^r r^2 - x^2 \, dx = \pi \int_0^r r^2 \, dx - \pi \int_0^r x^2 \, dx = \pi r^2 \int_0^r dx - \pi \int_0^r x^2 \, dx =$$

$$\pi r^2 \Big[x \Big]_0^r - \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^r = \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3 = \text{VOLUME } \tfrac{1}{2} \text{ SFERA}$$

QUINDI IL VOLUME DI UNA SFERA
E' IL DOPPIO, OSSIA

$$\text{VOL. SFERA} = \frac{4}{3} r^3 \pi \;//$$

Q.e.d.

24/2/2002.-